

Дәріс №11-12. Полярлық координаталарындағы қос интеграл және үштік интеграл

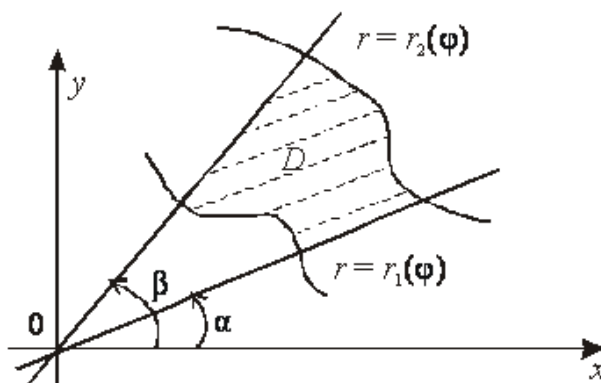
1. Двойной интеграл в полярных координатах.

При переходе в двойном интеграле от прямоугольных координат x, y к полярным r, φ связанным с прямоугольными координатами соотношениями

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi,$$

имеет место формула

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi. \quad (1)$$



Если область интегрирования D ограничена лучами $r = \alpha$ и $r = \beta$ ($\alpha < \beta$) и кривыми $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$, где $r_1(\varphi)$ и $r_2(\varphi)$ ($r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi)$) - однозначные функции на отрезке $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, то двойной интеграл может быть вычислен по формуле

$$\iint_D F(\varphi, r) r dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(\varphi, r) r dr,$$

где $F(\varphi, r) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. При вычислении интеграла $\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(\varphi, r) r dr$ величину φ полагают постоянной.

Пример 1. Перейдя к полярным координатам, вычислить

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy,$$

где область D - круг радиуса $R = 1$ с центром в начале координат.

Решение. Полагая $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, получаем :

$$\sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-(r \cos \varphi)^2 - (r \sin \varphi)^2} = \sqrt{1-r^2}.$$

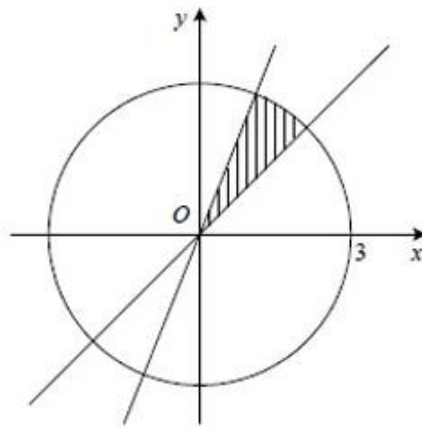
Так как в области D координата r при любом φ изменяется от 0 до 1, а φ изменяется от 0 до 2π , то

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r \sqrt{1-r^2} dr = \frac{2}{3}\pi.$$

Пример 2. Вычислить в полярных координатах двойной интеграл

$$\iint_D \sqrt{9-x^2-y^2} dx dy,$$

где область D ограничена линиями $x^2+y^2=9$, $y=x$, $y=\sqrt{3}x$.



Выразим подынтегральную функцию как функцию полярных переменных:

$$\begin{aligned} \sqrt{9-x^2-y^2} &= \sqrt{9-(r \cos \varphi)^2 - (r \sin \varphi)^2} = \\ &= \sqrt{9-r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \sqrt{9-r^2}. \end{aligned}$$

Данные в условии линии, ограничивающие D , приводим к полярным координатам:

$$\begin{aligned} x^2+y^2=9 &\Rightarrow (r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 = 9 \Rightarrow \\ &\Rightarrow r^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = 9 \Rightarrow \\ &\Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3, \\ y=x &\Rightarrow r \sin \varphi = r \cos \varphi \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}; \\ y=\sqrt{3}x &\Rightarrow r \sin \varphi = \sqrt{3}r \cos \varphi \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Переходим от двойного интеграла к повторному, учитывая пределы интегрирования, верные в третьем случае:

$$I = \iint_D \sqrt{9-r^2} r dr d\varphi = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_0^3 r \sqrt{9-r^2} dr$$

Вычисляем интеграл (так как повторные интегралы независимы друг от друга, каждый из них вычисляем отдельно и результаты перемножаем):

$$\begin{aligned} I &= \varphi \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \bullet \left(-\frac{1}{2} \right) \int_0^3 (9-r^2)^{\frac{1}{2}} d(9-r^2) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \bullet \frac{2(9-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3} \Big|_0^3 = \\ &= -\frac{1}{3} \bullet \frac{\pi}{12} (0-27) = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Курс

Тройные интегралы

1. Тройной интеграл в прямоугольных координатах.

Тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$, распространенным на область V , называется предел соответствующей трехкратной суммы :

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ \max \Delta y_j \rightarrow 0 \\ \max \Delta z_k \rightarrow 0}} \sum_i \sum_j \sum_k f(x_i, y_j, z_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

Вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех обыкновенных (однократных) интегралов или к вычислению одного двойного и одного однократного.

Итак, область V - правильная. Тогда для любой функции $f(x, y, z)$, непрерывной в области V , справедлива формула

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

Эта формула позволяет свести вычисление тройного интеграла к последовательному вычислению внутреннего определённого интеграла по переменной z (при постоянных x и y) и внешнего двойного интеграла по двумерной области D .

Переходя от двойного интеграла к повторному, получаем следующую формулу для вычисления тройного интеграла:

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz &= \\ &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \end{aligned}$$

Пример 1. Вычислить

$$I = \iiint_V x^3 y^2 z dx dy dz,$$

где область V определяется неравенствами $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x$, $0 \leq z \leq xy$

Решение . Имеем :

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^2 z dz = \int_0^1 dx \int_0^x x^3 y^2 \frac{z^2}{2} \Big|_0^{xy} dy = \int_0^1 dx \int_0^x \frac{x^5 y^4}{2} dy = \int_0^1 \frac{x^5}{2} \frac{y^5}{5} \Big|_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^{10}}{10} dx = \frac{1}{110}$$

Пример 2. Вычислить тройной интеграл

$$\iiint_V (z+y+z) dx dy dz ,$$

где V - параллелепипед, ограниченный плоскостями $x = -1$, $x = +1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 2$.

Решение. Пределы интегрирования для всех трёх определённых интегралов однозначно заданы уравнениями поверхностей, ограничивающих параллелепипед. Поэтому сразу сводим данный тройной интеграл к последовательности трёх определённых интегралов:

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_0^1 dy \int_0^2 (x+y-z) dz .$$

Вычисляем самый внутренний интеграл - по переменной z , считая x и y константами. Получаем:

$$\int_0^2 (x+y-z) dz = \left[xz + yz - \frac{z^2}{2} \right]_0^2 = 2x + 2y - 2 .$$

Вычисляем интеграл "в серединке" - по переменной y . Получаем;

$$\int_0^1 (2x + 2y - 2) dy = \left[2xy + y^2 - 2y \right]_0^1 = 2x - 1 .$$

Теперь вычисляем самый внешний интеграл - по переменной x :

$$\int_{-1}^1 (2x - 1) dx = \left[x^2 - x \right]_{-1}^1 = -2$$

Ответ: данный тройной интеграл равен -2.